Bond Price Solution

CIR++モデルを用いて債券価格公式を導出した後に、とすることでCIR+に関する価格式を考える。ＣＩＲ++モデルにおいて、r(t)と状態変数Y(t)の関係はaffineであるために、債券価格の解は以下の式で表される。

・・・(7.30)

ここで・・・(7.31)

制約式として、A(0)=B(0)=0があり、定義からH(t,T)=0である。

債券価格はY(t),とｔの関数であり、Y(t)のリスク中立確率下での過程は(7.2)に従い、short-rate過程が(7.1)に従うとすると、債券価格のPDEはIto’s lemmaを用いて導出する事ができる。(7.30)を用いて債券価格を偏微分し、ＰＤＥに代入することで、以下の常微分方程式を得る。

・・・(7.３２)

ここで、fundamental CIRモデルと上記の式が一致しているので、の式は以前と同じ解である。

・・・（７．３3）

・・・（７．３４）

ここでである。

観測される初期時点の債券価格から(7.30)を計算するために、0時点の初期価格の対数を取る。

・・・(7.35)

Tに関して微分を行い整理する。

・・・(7.36)

(7.32)からA(T),B(T)の偏微分を(7.36)に代入しTをtに置き換える。

・・・(7.37)

ここで、である。(7.37)は、=a、=b とすると(7.22)式と等しい。であり、Y(t)は負にならないので、short rateが負になるのは、が負の値を取るときである。カリブレーションを行うと、現実的な値は正にとどまることを確認している。あるtに関して、が負であるか決定する重要な要因として、初期時点Y(0)の価値と、フォワードレートのf(0,ｔ)の形状がある。もしY(0)がr(0)に近い値を取り、f(0,T)の関数が逆の形状を取るのであれば、は負となる。逆にY(0)が0に近い値を取り、f(0,T)の関数が通常の形状を取るのであれば、は正である。CIR++モデルとinterest rate capsの価格にフィッティングさせた所、Y(0)はr(0)に比べ小さい値を取る事が分かった。

(7.31)にての積分として定義されているH(t,T)はCIR++モデル下で(7.35)を用いることで、以下のように書ける。

)

・・・(7.38)

CIR+モデル下では、であるので、(7.37)式が以下のように記載できる。

・・・(7.39)

いいかえると、ＣＩＲ＋モデルによるf(t,T)はtime-homogeneousであり、Y(t)を含んでいる。ＣＩＲ+モデル下でのリスク中立パラメータは、MPRと独立した債券の市場価格や金利デリバティブのcross sectionから計算されるので、fundamental CIR modelよりフィッティングの精度は高い。さらに、インプライドフォワードレートと観測フォワードレートのフィッティングを上げるためには、3,4のファクターを用いたmultiple-factor single plus modelが良い。

CIR+モデルのH（ｔ、Ｔ）関数は以下で表される。

・・・(7.40)

Expected Bond Returns

Preference-free Gaussian modelのように、Preference-free CIR+とCIR++モデルのMPRの一般形で非線形な形状を取る事ができる。測度を変換する際には以下の式で表す事ができる。

…(7.41)

ここでzは非線形であり、複数の状態変数を表す。

(7.41)を(7.2)に代入することで、実測度下での状態変数は以下の式で表す事ができる。

…(7.42)

もちろん一意解やギルサノフの定理の条件を保証するには、arbitrage-free mannerの下での測度変換を可能とする関数が必要とされる。(例えば、のパラメータの条件として、無限大に爆発しないことが挙げられる。これはギルサノフ定理のNovikov条件に必要とされる)実測度下での、債券の確率過程は以下で表される。

…(7.43)

伝統的なCIRモデル下でのMPRでは、実際の債券の期待リターンの動きを表す事ができないと言われている。例えば、期待リターンは正であり期間構造の傾きと同じ方向に動く。これらの二つの特徴は伝統的なCIRモデルでは相反している。期待リターンの実際の動きを表すために、Duffeeは伝統的なアフィンモデルのessentially affineへの拡張を行っており、Duarteはアフィンモデルのsemi affineモデルへの拡張を行った。DuarteのモデルはCIR+モデルに似ており、なぜなら状態変数に対してno affineな実測度モデルを可能としているからである。CIR+モデルはpreference-freeであるが、fundamental　CIRモデルと重なる。更なる実証分析では、DuffeeやDuarteより更に一般的なMPRSを使ったfundamental CIRモデルの拡張を行っている。そのようなモデルは、MPRsに一般形状を可能としているCIR+モデルに似ている。

DuffeeやDuarteの特徴はより実証的な期待リターンの動きをとらえているものの、イールドカーブのcross-sectionalでtime-seriesの特徴に瞬間的にfittingさせることには難しさがある。DuffeeやDuarteは、一般化されたリスクプレミアムを仮定したアフィンモデルでも、期間構造の傾きと条件付き分散や期待リターンの関係性を瞬間的に捉える事はできないことを言っている。これらのモデルに対して、(7.43)の期待リターンはarbitrary nonlinearities であり複数の状態変数を持つ事ができ、Vasieck+モデルと類似している。つまりCIR+モデルはfundamental CIRモデルに比べてリスク中立パラメータを得るためにより少ないmisspecification bias を持っていると言える。